Smarandache LCM 函数与其对偶函数的混合均值

闫晓霞

(汉中职业技术学院,陕西 汉中 723000)

摘 要:研究Smarandache LCM 函数$SL(n)$与其对偶函数的混合均值问题,并利用初等方法和组合方法给出一个有趣的混合均值公式.结果显示,$SL(n)$函数的值与其对偶函数的值几乎处处不同.

关键词:Smarandache LCM 函数;对偶函数;混合均值;渐近公式

中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1001-8735(2010)03-0229-03

0 引言

对任意正整数n,著名的Smarandache LCM 函数$SL(n)$定义为最小的正整数k,使得$n\mid[1,2,\cdots,k]$,这里$[1,2,\cdots,k]$表示$1,2,\cdots,k$的最小公倍数.例如$SL(6)=3$,$SL(10)=5$,$SL(12)=4$,$SL(20)=5$,$\cdots$.特别当n的标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时,不难验证

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}.$$

关于这个函数的性质,许多学者进行了研究,并取得不少重要的结果[1-7].文献[2]研究了$SL(n)$的值分布问题,证明了渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-P(n))^2=\frac{2}{5}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子.

Le Maohua[4] 讨论方程$SL(n)=S(n)$的可解性(其中$S(n)$为Smarandache函数),证明了任何满足该方程的正整数可表示为$n=12$或$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$,其中$p_1,p_2,p_r,p$是不同的素数且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_r$是满足$p>p_i^{\alpha_i}$ $(i=1,2,\cdots,r)$的正整数.

文献[5]研究了均方值$(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2$的渐近性质,给出渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2=\frac{4}{5}\zeta\left(\frac{5}{4}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中:$\zeta(n)$为Riemann Zeta-函数;c_i为可计算的常数;$\overline{\Omega}(n)$为可加函数,定义为:$\overline{\Omega}(n)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j p_j$,如果$n$的标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$.

1 结论

定义函数$SL(n)$的对偶函数$\overline{SL}(n)$如下:

$$\overline{SL}(n)=\min\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}.$$

这个函数的前几项为$\overline{SL}(1)=1$,$\overline{SL}(6)=2$,$\overline{SL}(12)=3$,$\overline{SL}(20)=4$,$\cdots$关于这一函数的初等性质,我们知道的甚少,甚至不知道它的均值分布性质.本文的目的是利用初等方法和组合方法研究其混合均值

收稿日期:2009-10-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)

作者简介:闫晓霞(1970-),女,陕西汉中人,汉中职业技术学院讲师,主要从事基础数学教学与研究.E-mail:yanxiaoxiahs2007@sina.com.

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} \tag{1}$$

的渐近性质. 关于这一问题目前似乎还没有人研究，然而这一问题是有意义的，因为(1)式的渐近性反映了这两个函数值分布的规律. 如果渐近公式 $\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}\sim\frac{x}{\ln x}$ 成立，那么就可以断定函数 $\overline{SL}(n)$ 与 $SL(n)$ 的比值几乎与素数定理相同. 本文针对这一问题进行了研究，并证明了下面的结论.

定理　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right).$$

显然，定理中的误差项是非常弱的，也就是说误差项与主项仅差一个 $\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}$ 因子，而是否存在一个较强的渐近公式也是一个有趣的问题.

2　定理的证明

将所有小于或等于 x 的正整数 n 分为 3 种情况讨论：$A=\{n:\omega(n)=1,n\leqslant x\}$；$B=\{n:\omega(n)=2,n\leqslant x\}$；$C=\{n:\omega(n)\geqslant 3,n\leqslant x\}$，其中 $\omega(n)$ 表示 n 的所有不同素因子的个数. 下面分别估计函数 $\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}$ 在这 3 个集合上的均值. 注意到素数定理[8]

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

有

$$\sum_{n\in A}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}=\sum_{p^\alpha\leqslant x}\frac{\overline{SL}(p^\alpha)}{SL(p^\alpha)}=\sum_{p\leqslant x}\frac{\overline{SL}(p)}{SL(p)}+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2}}\frac{\overline{SL}(p^\alpha)}{SL(p^\alpha)}=$$
$$\sum_{p\leqslant x}1+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2}}1=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)+O\left(\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\sum_{p\leqslant x^{1/\alpha}}1\right)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{2}$$

现在估计主要误差项. 当 $n\in B$ 时，有 $n=p^\alpha q^\beta$（p,q 为不同的素数）. 不妨设 $p^\alpha<q^\beta$，注意到渐近公式[9]

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+c_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

有

$$\sum_{n\in B}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}=\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta\leqslant x\\ p^\alpha<q^\beta}}\frac{\overline{SL}(p^\alpha)}{SL(q^\beta)}=\sum_{p^\alpha\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p^\alpha<q^\beta\leqslant\frac{x}{p^\alpha}}\frac{p^\alpha}{q^\beta}=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q^\beta\leqslant\frac{x}{p}}\frac{p}{q^\beta}+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\sqrt{x}\\ \alpha\geqslant 2}}\sum_{p^\alpha<q^\beta\leqslant\frac{x}{p^\alpha}}\frac{p^\alpha}{q^\beta}=$$
$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{p}{q}+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^{\frac{1}{2}}\ln x\right)+O\left(\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\sqrt{x}\\ \alpha\geqslant 2}}p^\alpha\ln\ln x\right)=$$
$$\sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{p}{q}+\sum_{p\leqslant\frac{\sqrt{x}}{\ln x}}\sum_{q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{p}{q}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=$$
$$\sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\leqslant\sqrt{x}}p\left(\ln\ln\frac{x}{p}-\ln\ln p+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)=$$
$$\sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\leqslant\sqrt{x}}p\ln\frac{\ln x-\ln p}{\ln p}+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)\ll$$
$$\sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\leqslant\sqrt{x}}p\ln\frac{\ln x-\frac{1}{2}\ln x+\ln\ln x}{\frac{1}{2}\ln x-\ln\ln x}+\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\ll$$
$$\sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\leqslant\sqrt{x}}p\ln\left(1+\frac{4\ln\ln x}{\ln x-2\ln\ln x}\right)+\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\ll$$

$$\sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\leqslant\sqrt{x}} \frac{p\ln\ln x}{\ln x-2\ln\ln x}+\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x} \ll \frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}. \tag{3}$$

当 $n\in C$ 时，以 $\omega(n)=3$ 为例，不妨设 $n=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}$ 且 $p_1^{\alpha}<p_2^{\beta}<p_3^{\gamma}$. 于是，由(3)式的估计方法有

$$\sum_{\substack{p_1^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}\leqslant x\\ p_1^{\alpha}<p_2^{\beta}<p_3^{\gamma}}} \frac{\overline{SL}(p_1^{\alpha})}{SL(p_3^{\gamma})} = \sum_{p_1^{\alpha}\leqslant x^{1/3}} p_1^{\alpha} \sum_{\substack{p_2^{\beta}p_3^{\gamma}\leqslant x/p_1^{\alpha}\\ p_2^{\beta}<p_3^{\gamma}}} \frac{1}{p_3^{\gamma}} = O\Big(\sum_{p_1\leqslant x^{1/3}} p_1 \sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{p_1}}} \sum_{p_2<p_3\leqslant\frac{x}{p_1p_2}} \frac{1}{p_3} \ll$$

$$\sum_{p_1\leqslant x^{1/3}} \frac{\sqrt{xp_1}}{\ln x}\ln\ln x \ll \frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}. \tag{4}$$

注意到正整数 n 的所有不同素因子的个数 $\omega(n)\ll\ln\ln n$，于是反复应用(4)式，不难推出估计式

$$\sum_{n\in C} \frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ 3\leqslant\omega(n)\leqslant\ln\ln x}} \frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} = \sum_{3\leqslant k\leqslant\ln\ln x} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)=k}} \frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} \ll \frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}. \tag{5}$$

结合(2)，(3)，(5)式，我们推出估计式

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right).$$

于是完成了定理的证明.

参考文献：

[1] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报：自然科学版，2008，38(2)：1-3.

[2] Chen Jianbin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna，2007，3(2)：15-18.

[3] Murthy A. Some notions on least common multipies[J]. Smarandache Notions Journal，2001，12：307-309.

[4] LE Mao-hua. Two function equations[J]. Smarandache Notions Journal，2004，14：180-182.

[5] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差均值[J]. 纯粹数学与应用数学，2008，24(1)：71-74.

[6] Lu Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna，2007，3(1)：22-25.

[7] Ge Jian. Mean value of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna，2007，3(2)：109-112.

[8] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.

[9] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York：Springer-Verlag，1976.

[10] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. Erhus University Press，USA，1996.

[11] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[12] 潘承洞，潘承彪. 初等数论[M]. 北京：北京大学出版社，2001.

[13] Balacenoiu I，Seleacu V. History of the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal，1999，10(1/2/3)：192-201.

Hybrid Mean Value Problem of the Smarandache LCM Function and Its Dual Function

YAN Xiao-xia

(*Hanzhong Vocational and Technical College*，*Hanzhong* 723000，*Shaanxi*，*China*)

Abstract：In this paper，a hybrid mean value problem involving the Smarandache LCM function $SL(n)$ and its dual function were studied，and an interesting hybrid mean value formula was given by using the elementary and combination methods. This shows that the value of $SL(n)$ are almost not equal to its dual function.

Key words：Smarandache LCM function；dual function；hybrid mean value；asymptotic formula

【责任编辑 陈汉忠】